Terminales - Epreuve groupée de mathématiques
Mardi 19 octobre
Durée : 4 heures

• **Calculatrice autorisée**

• Toute piste de recherche, même non aboutie, figurera sur la copie.

• **Chaque exercice est à commencer en haut d'une page.**
Une attention particulière sera apportée au **soin** et à la **rédaction** .

• Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. 2 points

Le but de cet exercice est de déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$.

1. Montrer que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.
   Vous pourrez pour cela étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x$.
2. Démontrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Exercice 2. 2 points

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sin\left(\dfrac{1-x}{1+x^2}\right)$
2. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 7x + 12}$
3. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{x^3 + 1}{1 - x^2}$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^x - \cos x$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \sin(x)}{2 - \sin x}$

Exercice 3. 2 points

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 3 - \dfrac{5}{x^2}$.

1. Soit a un réel strictement positif fixé. Quelles sont, en fonction de a, les valeurs de x pour lesquelles : $3 - a < f(x) < 3 + a$, où a est un réel strictement positif ?
2. Déduire de la question précédente la limite de f en $+\infty$ en justifiant.

Exercice 4. 4 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{8u_n + 3}{u_n + 6}$.

1. **a.** Vérifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 8 - \dfrac{45}{u_n + 6}$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $1 < u_n < 3$.

c. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b. En déduire la limite de la suite (v_n).

3. Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de v_n .
En déduire le comportement asymptotique de la suite (u_n).

Exercice 5. 4 points

Les questions 1 et 2 peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.
On pourra utiliser les résultats de la question 1 dans la question 2.

1. Soit (a_n) la suite définie par : $a_0 = 13$ et pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \dfrac{1}{5}a_n + \dfrac{4}{5}$
Soit (S_n) la suite définie par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

.

a. Soit (b_n) la suite définie par : $b_n = a_n - 1$ pour tout entier naturel n.
Démontrer que (b_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

b. Déduire de ce qui précède que pour tout entier naturel n, $a_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}$.
En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

c. Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).

d. Pour tout entier naturel n, exprimer S_n en fonction de n.
En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

2. Soit (x_n) une suite de nombres réels et soit (s_n) la suite définie par :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

pour tout entier naturel n.
Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.
Pour chacune d'entre elles, justifier : par une démonstration si elle est vraie, par un contre-exemple si elle est fausse.

a. $\ll$ Si la suite (x_n) converge, alors la suite (s_n) converge aussi. $\gg$

b. $\ll$ Les suites (x_n) et (s_n) ont même sens de variation. $\gg$

<u>Exercice 6</u>. 6 points

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   Quelles sont les droites asymptotes à $\mathcal{C}_f$?
3. Calculer $\ll$ à la main $\gg$ $f'(0)$ (c'est-à-dire en revenant à la définition du nombre dérivé, **sans** utiliser la question suivante).
4. Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et montrer que pour tout réel x de $\mathcal{D}_f$:
   $f'(x) = \dfrac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$, où g est la fonction définie par : $g(x) = x^3 - 3x - 3$.
5. Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$. (Ne pas oublier les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.)
6. On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha \approx 2,1$.
   En déduire le tableau de signe de g.
7. En déduire le tableau de variations de f.
8. On considère la droite (Δ) d'équation : $y = 2x$.
   - **a.** Calculer, pour tout réel x de $\mathcal{D}_f$, la différence $d(x) = f(x) - 2x$.
   - **b.** Etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (Δ).
   - **c.** (Δ) est-elle asymptote à $\mathcal{C}_f$?
   - **d.** Déterminer le nombre de tangentes à $\mathcal{C}_f$ parallèles à (Δ).